Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Tronc Commun Mathématiques et Informatique
Année Universitaire 2020/2021

Juin 2021

Série 3 d'Algèbre 2.
Applications linéaires et Matrices

Exercice 1.
Soit f une application de E dans F. Parmi les applications ci-dessous, trouver celles qui sont linéaires. Puis déterminer le noyau et l'image et preciser soi elles sont injectives, surjectives.

- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $E = F = \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.
- $E = F = \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$.
- $E = \mathbb{R}^2,\ F = \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (0, 2x + y, x + 3y)$.
- $E = \mathbb{R}^2,\ F = \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (x - y, x + y, xy)$.
- $E = F = \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x, x + y, x - z)$.

Exercice 2.
Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y) = (x, 2x + y, y).$$

a. Montrer que f est linéaire.
b. Déterminer $kerf$ et Imf.
c. Démontrer que $dim\mathbb{R}^2 = dim\ kerf + dim\ Imf$

Exercice 3.
Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = (x + y + z, x + 2y - z, 2x - y + z).$$

1) Déterminer le noyau et l'image de f. f est-elle injective ? surjective ?
2) Montrer que $ker(f) \bigoplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4.
Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = (x, -3y + 4z, -2y + 3z)$$

1) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que f est bijective.
2) Calculer $f \circ f$. En déduire l'expression de f^{-1}.

Exercice 5. Soient $A,\ B,\ C,\ D$ les quatres matrices définies comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 10 \\ 5 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A + D,\ B - C,\ B + C,\ {}^tC, +{}^tB,\ 2B - 3C,\ A + 5C,\ C + D$

Exercice 6.
1)Résoudre

$$5\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & z + t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 3y \\ t & t \end{pmatrix}$$

2) Calculer

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \dots \begin{pmatrix} -n & n \\ 2n & 3n \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Calculer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Calculer les produits BA, ${}^tAB$, BC, CB, ${}^tDE$, D^tE, DC, où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui déterminer leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Montrer, sans calcul, que si A est inversible alors $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.
3. Par un calcul direct, évaluer $A^2 - 3A + 2I_3$. Que peut-ont conclure.

Exercice 11. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^n + A^{n-1} + \ldots + A + I_n = 0.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 12. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'ensemble S des nombres réels λ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.
2. Pour chaque $\lambda \in S$, déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = \lambda X$.
3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que $P^3 - P^2 + P - I_3 = 0$.
   b) En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.
4. Calculer $D = P^{-1}AP$ puis D^n.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression de A^n.